TD 40 : Fonctions de deux variables

Ouverts de $\mathbb{R}^2$, continuité

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1) $\mathbb{R}^2$
2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
3) $[0,1]^2$
4) $[0,1[^2$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$

Exercice 2. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cup V$ et $U \cap V$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) Montrer que pour tous réels x et y, $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|$. En déduire que f est continue en $(0,0)$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dérivée directionnelle

Exercice 4. On considère la fonction « norme » $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

1) Justifier que la restriction de N à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner ses dérivées partielles.
2) Montrer que N n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 5. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis donner leur gradient en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $f(x,y) = e^{xy} + xy + 1$
2) $g(x,y) = 3x^2 - \cos(y^2 - x)$
3) $h(x,y) = (1+x^2)^y$

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) On pose $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée directionnelle de f selon v au point $(0,0)$.
2) Montrer que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = h(x)$$

Indication : on pourra considérer la fonction $g : y \mapsto f(x,y)$.

Règle de la chaine

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $g : (x,y) \mapsto \sqrt{f(x,y)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $g : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Donner les dérivées partielles des fonctions g suivantes en fonction de celles de f :

1) $g(x,y) = f(y,x)$
2) $g(x,y) = f(xe^y, ye^x)$

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (r,\theta) &\mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles de g, qu'on notera $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, en fonction de celles de f.

Extrema

Exercice 12. On pose $f : (x,y) \mapsto x^2 - 3xy + 3y^2 + 1$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir qu'elle possède un unique point critique.
2) En écrivant $f(x,y)$ différemment, conclure qu'en ce point, la fonction f admet un minimum global.

Exercice 13. On pose $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1) Montrer que f possède un unique point critique $(x_0, y_0) = (-1,-1)$.
2) On pose $g(h) = f\big((-1,1) + (h,-h)\big)$. Par un développement limité en 0 de g, montrer que $(-1,-1)$ n'est pas un extremum de f.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1) Montrer que f n'admet pas de maximum (global).

On cherche maintenant à déterminer le ou les minima de f, s'ils existent.

2) Déterminer les trois points critiques de f, l'un étant $(0,0)$.
3) Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum de f. Il reste donc deux points critiques.
4) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se contenter d'étudier un seul des deux points critiques. On notera (α, β) ce point critique (celui tel que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$).

Ainsi, on peut donc se restreindre à chercher les minima de f sur l'ouvert $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\big\}$.

5) Pour $y_0 > 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un unique minimum. On notera $g(y_0)$ la valeur de f en ce minimum. Donner l'expression de $g(y_0)$.
6) Montrer que la fonction $y \mapsto g(y)$ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ Préciser où ce minimum est atteint.
7) Conclure.